ΤΟ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΙ Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΟΥ ΣΗΜΑΣΙΑ

Γεώργιος Δαμαλάς Μαθηματικός. Καλαμωτή - Κώμη, Χίος

Από την εισήγηση στο 15ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ε.Μ.Ε.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντιπαράδειγμα γεννιέται από πρόβλημα και δίνει απάντηση σε πρόβλημα. Δείχνει την "ικανή" συνθήκη μιας ιδιότητας την οποία θέλω να εξασφαλίσω, διότι την θεωρώ χρήσιμη. Η διδακτική του σημασία έγκειται στο ότι αποτελεί πρόκληση για αποδόμηση των ήδη καθιερωμένων δομών στο μυαλό των μαθητών. Σήμερα που το παιδί ζει και αναπτύσσεται στο σύγχρονο πληροφοριακό και τεχνολογικό περιβάλλον, σχηματίζει ιδιαίτερους επικοινωνιακούς και πολιτιστικούς κώδικες. Ο Δάσκαλος συναντά δυσκολία, διότι το παιδί σήμερα, περισσότερο από άλλοτε, προβάλλει αντίσταση στο καινούργιο. Ένας τρόπος για να κάμψει την αντίσταση και να παρακάμψει τα εμπόδια είναι: Να εκχωρήσει το "καλό πρόβλημα" στο παιδί.

ΚΥΡΙΩΣ ΚΕΙΜΕΝΟ

Όταν το 1980 μιλούσαμε για διδακτική των Μαθηματικών, μας αντιμετώπιζαν με αποστροφή. Έκτοτε δημιουργήθηκαν σχετικά τμήματα στα Πανεπιστήμια και πολλοί επιστήμονες Μαθηματικοί ευαισθητοποιήθηκαν. Ήταν απαίτηση των καιρών. Στην εποχή της βέλτιστης απόδοσης και της μέγιστης αποτελεσματικότητας οι κοινωνίες παίρνουν θέση. Δεν πρόκειται βεβαίως για τα Μαθηματικά, αλλά για τη μετάδοσή τους. Αυτό εξάλλου ενδιαφέρει και την κοινωνία. Η αντίληψη "εγώ είμαι Μαθηματικός, με Διδακτική θα ασχολούμαι τώρα;" έχει παραμερισθεί. Την κοινωνία δεν την ενδιαφέρει τι είσαι, αλλά πόσο χρήσιμος είσαι. Άσε που και το Μαθηματικός είναι μεγάλη κουβέντα. Οι όντως Μαθηματικοί ανήκουν στην "ελίτ" και όχι μόνο αυτό, θα πρέπει να είναι και δάσκαλοι. Όσο για τον πολύ κόσμο, ας αφήσει το "Μαθηματικός" και ας κρατήσει το "Δάσκαλος". Η κοινωνία πρέπει να σε ανταμείψει γι' αυτό.

Η παγιωμένη αντίληψη.

Η ευθύνη για την απλούστευση και τη μετάδοση των μαθηματικών γνώσεων βαρύνει τους μαθηματικούς. Είναι αλήθεια ότι υπήρξε μια περίοδος που ο φορμαλισμός μαζί με την συντομογραφική του στενογραφία μας λοξοδρόμησαν. Ομιλούμε για τον ευαίσθητο χώρο της Μ.Ε. Η αντίληψη όμως αυτή ξεκινούσε από τους Πανεπιστημιακούς χώρους και είχε σαν αποτέλεσμα τα Μαθηματικά να εμφανίζονται σαν τέρας καθαρολογίας. Θυμόμαστε ακόμη εκείνα τα "Θεωρούμε τη σχέση η οποία ισοδυνάμως γράφεται", "Ας υποθέσωμεν", "Το αντίστροφον του θεωρήματος δεν ισχύει", "Αν εκλέξωμεν", "Θα γράφομεν", "Θα ονομάζομεν". Ήταν επιστημονικά ανέντιμο! Αυτός έκανε ανάλυση, εσένα σου παρουσίαζε τη σύνθεση. Αυτός ξεκινούσε από την εποπτεία και τη γραφική παράσταση, εσένα σου το έκρυβε. Αυτός ξεκινούσε από συγκεκριμένο παράδειγμα, σου παρουσίαζε την κατασκευασμένη Θεωρία της οποίας αφετηρία ήταν το παράδειγμα. Και έπαιρνε εκείνο το ύφος το αυτάρεσκο, το βαρύγδουπο, το απωθητικό, που έφθανε τα όρια του κωμικού. Εδώ θα έπρεπε να του απευθύνει κάποιος το ερώτημα: Για ποιο πράγμα ομιλείς Κύριε; Ποιό είναι το πρόβλημα; Που το πάς; Σε τι μας χρησιμεύει; Σ' αυτόν που κάνει Μαθηματικά υπεισέρχεται η ενόραση, η εμπειρική δοκιμή, η εποπτεία, η δοκιμή - πλάνη, η ψηλάφιση, η εικοτολογία, η αναλογία. Το ομολογεί ο μεγάλος Gauss: «Έχω το αποτέλεσμά μου, αλλά δεν ξέρω ακόμη πως να το αποδείξω». Και ο Gauss ήταν τουλάχιστον ειλικρινής. Εμείς βιαζόμαστε να το αποδείξουμε σε ανθρώπους που συνήθως δεν ξέρουν και παίρνουμε και ύφος 'βαρύδουπο, ενώ χρέος μας θα ήταν να ωθήσουμε τα παιδιά στην Αρχή, στην Πηγή και στην Ιστορία της γνώσης.

Η εκχώρηση του "καλού προβλήματος"

Το αντιπαράδειγμα είναι η κοίτη μέσα στην οποία νοηματοδοτείται η τηρούμενη επιστημονική παράδοση. Είναι φλέβα νερού που ζωντανεύει την παραγωγή της γνώσης. Η διδακτική του σημασία φαίνεται πιο καθαρά στο feed-back της Διδασκαλίας, όταν πάρεις το σήμα "τι δεν κατενόησαν" ή «που υστέρησαν». Το πρόβλημα που αναφύεται εδώ είναι διδακτικό. Η αντιμετώπιση του γίνεται με το να επιλέξει ο Δάσκαλος «το καλό πρόβλημα». Χαρακτηριστικό γνώρισμα του επιστήμονα και του Δασκάλου- Μαθηματικού είναι η ευκολία και η ταχύτητα με την οποία επικαλείται το αντιπαράδειγμα. Το αντιπαράδειγμα γεννιέται από πρόβλημα και δίνει απάντηση σε πρόβλημα. Δείχνει στην «ικανή» συνθήκη μιας ιδιότητας. Η ιδιότητα βέβαια είναι το χρήσιμο που θέλω να το εξασφαλίσω, για να πληροφορηθώ π.χ. τη μορφολογία της καμπύλης, για να έχω στα χέρια μου μια συνάρτηση που απεικονίζει διάστημα σε διάστημα, για να μπορώ να λύνω μια εξίσωση, για να έχω ένα κριτήριο σύγκλισης, ένα κριτήριο ολοκληρωσιμότητας κ.τ.λ. Θέλω λοιπόν να εξασφαλίσω την ιδιότητα, ώστε να ισχύουν επαρκείς προϋποθέσεις. ΟΧΙ υπεραπλούστευση του τύπου «δεν ισχύει το αντίστροφο». Ποιο αντίστροφο; Εκεί που εμφανίζεται το πρόβλημα είναι στο «επαρκείς». Διατύπωσε το αντίστροφο λοιπόν να δούμε αν ισχύει ή δεν ισχύει. Και ύστερα να δούμε και αυτό άν είναι χρήσιμο. Άλλως έτσι παίζοντας η σωρευτική λογική ανάπτυξη διογκώνεται δημιουργώντας άχρηστα Μαθηματικά.

1) Το αντιπαράδειγμα γίνεται αφετηρία για κατασκευή Θεωρίας.

Δεν έχετε παρά να ρωτήσετε αυτούς που κάνουν έρευνα να σας πουν πως ξεκίνησαν. Ψάχνεις να βρεις ένα πίνακα στο Π_2 που δεν έχει αντίστροφο. Βρήκες! Καταρρίπτεις τον ισχυρισμό «όλοι οι πίνακες έχουν αντίστροφο» - εικασία και στη συνέχεια θέτεις το πρόβλημα. «Υπό ποίες προϋποθέσεις ένας πίνακας στο Πν έχει αντίστροφο» -Κατασκευάζεις Θεωρία.

2) Αντιπαράδειγμα για να δείξουμε τους λόγους που υπαγόρευσαν να ορίσουμε έτσι την πράξη

Το ερώτημα πάντοτε τίθεται γιατί να ορίσω έτσι την έννοια, την πράξη κ.τ.λ. Ένας π.χ. πολλαπλασιασμός πινάκων χωρίς την προσεταιριστική ιδιότητα θα περιόριζε πολύ την ενότητα πίνακες σ' ένα φτωχό πραξιακό σύστημα. Η προσεταιριστικότητα είναι μια από τις αιτίες του Γραμμή x Στήλη! Το παράδειγμα και η νύξη αυτή έχει διδακτική σημασία και βεβαίως θα δοκιμάσεις το Γραμμή x Γραμμή, Στήλη x Στήλη, Στήλη x Γραμμή.

Θα δοκιμάσουν με τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Γραμμή x Γραμμή $\quad (A \cdot B) \cdot \Gamma \neq A \cdot (B \cdot \Gamma)$

Στήλη x Στήλη $\quad (A \cdot B) \cdot \Gamma \neq A \cdot (B \cdot \Gamma)$

Στήλη x Γραμμή $\quad (A \cdot B) \cdot \Gamma \neq A \cdot (B \cdot \Gamma)$

Γραμμή x Στήλη $\quad (A \cdot B) \cdot \Gamma = A \cdot (B \cdot \Gamma)$

Εδώ έχει η δοκιμή μεγάλη διδακτική αξία.

3) Προφύλαξη από το λάθος.

Λάθη που γίνονται στο τυπικό των κανόνων, οδεύοντας μέσα από μονοδρομικές προσθετικές ενέργειες.

α). Ετέθη το πρόβλημα "να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \mathbb{R}$. Το αντιμετώπισαν με δυο τρόπους

ομάδα Α	**ομάδα Β**
$\left.\begin{array}{l}-1\le \text{ημx}\le 1\\ -1\le \text{συνx}\le 1\end{array}\right\}$, άρα $-2\le \text{ημx}+\text{συνx}\le 2$ Άρα έδειξαν ότι $f(A)\subseteq[-2,2]$	$f(x)=\sqrt{2}\cdot \text{συν}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $-1\le \frac{y}{\sqrt{2}}\le 1$, άρα $-\sqrt{2}\le f(x)\le \sqrt{2}$ Άρα έδειξαν ότι $f(A)=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

Έχει το παράδειγμα διδάκτική σημασία, διότι σπάει το σχήμα «έχω το δικαίωμα» που τους παρασύρει να ενεργήσουν μονοδρομικά

β). Ισχύει η συνεπαγωγή $A\cdot B=\mathbf{0}\ \Rightarrow\ A=\mathbf{0}\vee B=\mathbf{0}$ **;**

ΟΧΙ, γιατί αν $A=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\neq\mathbf{0}$ και $B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\neq\mathbf{0}$ και όμως $A\cdot B=\mathbf{0}$

4) Αντιπαράδειγμα για να διαφανεί η αναγκαιότητα των περιορισμών

Ετέθη να επιλύσουν την εξίσωση σαν εφαρμογή: $\log_2\left(x^2-x\right)=1+\log_2\left(x-1\right)$.

Το αντιμετώπισαν

ομάδα Α	**ομάδα Β**
$\log_2\left(x-1\right)+\log_2 x=\log_2 2+\log_2\left(x-1\right)$ $\log_2 x=\log_2 2$ x=2	$\log_2\left(x^2-x\right)=\log_2\left[2\left(x-1\right)\right]$ $x\left(x-1\right)=2\left(x-1\right)$ x=1 ή x=2

Στο ΤΕΣΤ θα πρέπει να αξιολογηθούν το ίδιο βαθμολογικά. Ας έχουν απαντήσει οι Α σωστά. Θα μάθουν ότι για να διαγράψεις έναν πραγματικό αριθμό πρέπει να έχει υπόσταση. Ξεκίνησε σαν παράδειγμα και κατέληξε σε αντιπαράδειγμα με διδακτική σημασία.

5) Πολλά παραδείγματα θα μπορούσε να αναφέρει κανείς που το αντιπαράδειγμα έχει θέση απόδειξης.

Γενικά, όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η «$\forall x : p(x)$» είναι ψευδής, πρέπει και αρκεί η $\neg\left(\exists x : p(x)\right)$ να είναι αληθής, να βρούμε δηλαδή ένα x_0 του σχετικού συνόλου αναφοράς, ώστε η $p(x_0)$ να είναι ψευδής. Το $p(x_0)$ λέγεται αντιπαράδειγμα για την $\forall x : p(x)$ είναι ψευδής.

Γενικά ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\neg(\forall x)\left[p(x)\right]\ \Leftrightarrow\ (\exists x)\left[\neg p(x)\right]$$

$$\neg(\exists x)\left[p(x)\right]\ \Leftrightarrow\ (\forall x)\left[\neg p(x)\right]$$

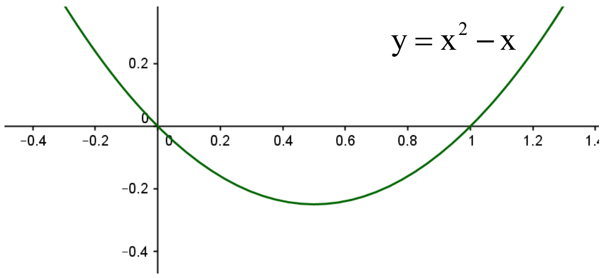
Το αντιπαράδειγμα βρίσκεται στον πυρήνα της διαψευσεοκρατίας. Ισχύει το κλασικό «επιστημονικό» το «διαψεύσιμον».
Το σχήμα αυτό το χρησιμοποιούν τα παιδιά ήδη στο προγνωσιακό στάδιο πριν εισαχθούν στη θεωρητική απόδειξη.

α). Διάψευση του ισχυρισμού ότι η αντιμεταθετικότητα ισχύει στον πολλαπλασιασμό των πινάκων. $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$. Έχουμε $A\cdot B=A$ και $B\cdot A=B$

$$A\cdot B\neq B\cdot A.$$

β). Διάψευση του ισχυρισμού ότι ισχύει $x^2 \geq x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Όταν $x = \frac{1}{2}$, τότε $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$



γ). Διάψευση του ισχυρισμού :

Εάν $0 < \alpha_\nu < \beta_\nu,\ \forall \nu \in \mathbb{N}$ και (β_ν) συγκλίνει, τότε και η (α_ν) συγκλίνει.

Παράδειγμα : $\alpha_\nu = 2 + (-1)^\nu$ και $\beta_\nu = 3 + \frac{1}{\nu}$.

Διαφαίνεται η ανάγκη η (β_ν) να συγκλίνει, αλλά με όριο το 0, ώστε να **συμπαρασύρει** και την (α_ν), **έτσι διαισθητικά**.

6) Αντιπαράδειγμα για ενίσχυση διδακτικού στόχου.

Ετέθη να βρούν το $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$ και απάντησαν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$. Προφανώς πήραν το $f(1)$. Ούτε καν σχημάτισαν το $A = \{1\} \cup \{2, +\infty)$.

7) Για ενίσχυση μοντέλου.

Το μοντέλο που λέγεται δευτεροβάθμια εξίσωση ενισχύεται και εδραιώνεται με το να επιλύσω την εξίσωση $x^2 - (2\alpha+1)x + \alpha^2 + \alpha = 0 \iff x_1 = \alpha + 1$ ή $x_2 = \alpha$ και ως προς α :

$\alpha^2 + (1-2x)\alpha + x^2 - x = 0 \iff \alpha_1 = x - 1$ ή $\alpha_2 = x$.

Οι υπάκουοι έλυσαν τις εξισώσεις κανονικά. Ο αιρετικός, ο ανυπάκουος κατέστρεψε το μοντέλο και προχώρησε με παραγοντοποίηση $(x-\alpha)^2 - (x-\alpha) = 0 \iff (x-\alpha)(x-\alpha-1) - 0$, οπότε :

ι) και η μαθηματική οντότητα ενισχύθηκε (απλή γραμμική μορφή)

ιι) και η παραγοντοποίηση σαν μέθοδος επίλυσης αναδείχθηκε.

8) Αντιπαράδειγμα για κατασκευή μοντέλου εννοιών, διαδικασιών, καταστάσεων

Έχει την έννοια του υποδείγματος, που είναι ένα σύστημα μαθηματικών σχέσεων που περιγράφουν συμβολικά τις υπό μελέτη διαδικασίες.

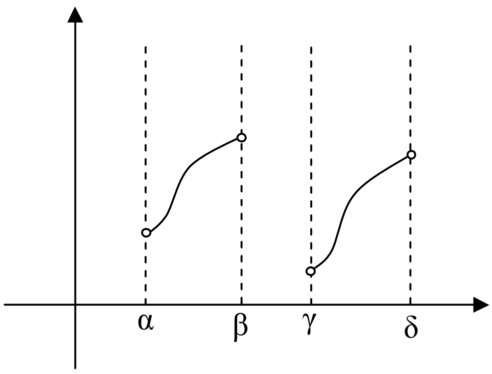
9) Αντιπαράδειγμα για να αγκιστρωθεί ο ορισμός

Αυτό το «ορίζομεν», «θα ονομάζομεν», ή του λες να δικαιολογήσει και απαντά. Είναι θέμα ορισμού. Μια αντίληψη να εξυψώνουμε τα απλά, τα άμεσα επιβάλοντας βαρύγδουπη ορολογία και εντυπωσιακούς συμβολισμούς. Χρόνια τώρα η τυπολατρία και ο φορμαλισμός κατέτρωγαν τη ζωτικότητα και το χυμό των Μαθηματικών. Με αντιπαραδείγματα δείχνουμε την πληρότητά του και την ορθότητά του από το να μη δημιουργεί αντιφατικές καταστάσεις στα ήδη καθιερωμένα. Θυμόμαστε την εξίσωση $x^3 = -8$. Εαν έγραφαν οι μαθητές $x = \sqrt[3]{-8}$, ζητούσαμε την κεφαλήν τους επί πίνακι. Τι να αξιολογήσεις εδώ εκτός ίσως από την πληροφορία ότι $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ορίζεται όταν $\alpha \geq 0$. Στην ώρα του όμως τονίζεις ότι την ορίζεις έτσι τη δύναμη για να μη χαλάσει όλη αυτή η ιστορία με $\sqrt[\nu]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{\nu}}$ και να τηρηθούν τα καθιερωμένα:

$$-2=\sqrt[3]{-8}=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\left[(-8)^2\right]^{\frac{1}{6}}=64^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{64}=2.$$

10) Μεγάλη διδακτική σημασία έχει το παράδειγμα του βιβλίου Μαθηματικά Γ Λυκείου σελίς 134 «Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί α, β, έτσι ώστε η συνάρτηση
$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{αν } x\le 1 \\ \alpha x+\beta, & \text{αν } x>1\end{cases}$ να είναι παρα5τγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$».
Σ' άλλο σημείο βέβαια φέρνει αντιπαράδειγμα συνεχούς και μη παραγωγίσιμης. Εδώ χρησιμοποιεί το «πρέπει». Πρόκειται για καθαρό πρόβλημα ευρέσεως. Στην ουσία ψάχνω να βρω ποιες από τις συνεχείς συναρτήσεις (που πρέπει και αυτές να τις καλέσω για να ενεργήσω επάνω τους) παραγωγίζονται. Ψάχνω για τον Καρδαμυλίτη μέσα στην Αθήνα. Λογικό είναι να καλέσω τους Χιώτες των Αθηνών. Τελικώς ψάχνω μέσα στην μονοπαραμετρική οικογένεια των συνεχών συναρτήσεων που διέρχονται από τι Α(1,1) ποιές σχηματίζουν γωνιώδες σημείο. Το πρόβλημα αναφέρεται σαν εφαρμογή, σαν παράδειγμα. Γίνεται όμως αντιπαράδειγμα όταν του προσδίδω διδακτική σημασία.

11) Αντιπαράδειγμα για το "επαρκές" των προϋποθέσεων προκειμένου να εξασφαλίσω το συμπέρασμα μου, αφού του έχω προσδώσει τον χαρακτήρα του «χρήσιμου».
Για την πρόταση 2 σελίδα 183 Μαθηματικά Γ' Λυκείου: "Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο διάστημα [α,β] ισχύει: Αν $f'(x)>0\ \ \forall x\in(\alpha,\beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β].
Αν όμως η f είναι ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα $A=(\alpha,\beta)\cup(\gamma,\delta)$ με $f'(x)>0$, $\forall x\in A$, αυτό δεν εξασφαλίζει το «γνησίως αύξουσα την f στο Α». Τέτοια αντιπαραδείγματα μπορεί να επινοήσει κανείς πολλά, ξεκινώντας από τη γραφική παράσταση.



Το αντιπαράδειγμα θεσμοθετεί, καθιερώνει την εσωτερική του γλώσσα, οι όροι και οι έννοιες που χρησιμοποιούνται σημασιολογούνται. Η ίδια έννοια σε διαφορετικά πράγματα έχει διαφορετικές σημασίες. Έχει τον χαρακτήρα του αυτονόητου, του άμεσου και για το οποίο δεν επερωτούμε. Ισχυροποιεί, πείθει, ενισχύει, αφοπλίζει. Δίνει σάρκα και οστά σ' αυτό που λέμε σύνδεση μεταξύ θεωρίας και πράξης. Γίνονται τότε τα μαθηματικά μια συναρπαστική δραστηριότητα. Επινοούνται νέες θεωρίες. Τα μαθηματικά επεκτείνονται, μεταπλάθονται και ζωντανεύουν. Ο επιστήμονας ελευθερώνεται και σταματά να ανακαλεί κάθε φορά μια πολύπλευρη Θεωρητική κατασκευή, καθώς και να ανασυνθέτει ορθολογικά το κάθε βήμα.

Ο επιστήμονας Μαθηματικός είναι αυτός που με ευκολία απαντά, ερμηνεύει, πείθει και εξηγεί με την συνεχή επίκληση αντιπαραδειγμάτων. Εύκολα το διαπιστώνει κανείς σε μια ομάδα εργασίας. Θέτει ερωτήματα, απαντά και έχει τον τελευταίο λόγο. Συνήθως εκεί δεν αποδεικνύουν. Αυτό ίσως χρειάζεται στην διατύπωση του μαθηματικού κειμένου.
Είναι υποχρέωση του μαθηματικού, του επιστήμονα και του Δασκάλου να εκχωρήσει «το καλό πρόβλημα στους σπουδαστές» Άλλο το αντιπαράδειγμα με επιστημονική σημασία και

άλλο το αντιπαράδειγμα που τίθεται για ενίσχυση και κατανόηση της ενότητας μέσα στην τάξη μετά το σήμα που παίρνει ο δάσκαλος στο feed back της διδασκαλίας και του οποίου η διδακτική σημασία είναι αναμφισβήτητη. Η επιμέρους ενότητα ριζώνει σαν απάντηση σ' ένα πρόβλημα. Το πρόβλημα το ίδιο αποδομεί το ήδη υπάρχον μέσα στο μυαλό του παιδιού, η κατάσταση αυτή στη φάση αυτή παίρνει τη μορφή του εμποδίου. Προβάλλει αντίσταση με το πρόβλημα. Το καινούργιο γυρεύει να αγκιστρωθεί μέσα στο ήδη υπάρχον. Γίνεται αναδόμηση, η ενότητα ζωντανεύει και εμπλουτίζει την υπάρχουσα νοητική δομή έτοιμη πλέον για καινούργιες προβληματικές καταστάσεις. Όσον αφορά τη θεμελίωση και την ορθολογικότητα, την απάντηση έδωσε ο ίδιος ο Kline "Τα μαθηματικά μεγαλώνουν σαν το δέντρο. Οσο αναπτύσσεται ο κορμός, τα κλαδιά και τα φύλλα, τόσο πιο βαθιά εισχωρούν και οι ρίζες στο έδαφος".

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Το αντιπαράδειγμα είναι εργαλείο σε ετοιμότητα που έχει ο επιστήμονας Μαθηματικός αλλά και ο καταξιωμένος δάσκαλος στη φαρέτρα του. Δεν είναι ο ρόλος του δασκάλου να εμφανίζει την αλήθεια σαν μια δυνατότητα και να αρκείται σε μια απλή μετάδοση πληροφοριών. Δημιουργεί την κατάλληλη ατμόσφαιρα ώστε να διευκολυνθεί η γνωσιακή αναδόμηση από τον ίδιο το μαθητή.

Το κατάλληλο παράδειγμα που θα ανασύρει ο δάσκαλος των Μαθηματικών την ώρα της αντίστασης στο καινούργιο φέρνει ενίσχυση, συμπλήρωση και ισορροπία.

Εδώ έγκειται η μεγάλη διδακτική του σημασία, ότι συντελεί στην αφομοίωση της νεοαποκτηθείσας γνώσης.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θέλω να ευχαριστήσω τον παλιό μου μαθητή και Σχολικό Σύμβουλο των Μαθηματικών Γιάννη Ράλλη για τις παρατηρήσεις του και τη συμβολή του στην προβολή αυτού του πονήματος